NÁHODNÝ POČET VLÁKEN PROTÍNAJÍCÍCH ROVINU TRHLINY VE VLÁKNOBETONU

Random number of fibers intersecting a crack plane in fiber-reinforced concrete

Miroslav Vořechovský [1], Václav Sadílek [2]

This paper derives the probabilistic distribution functions for a random number of fibers that intersect a plane in a composite specimen reinforced by short fibers. Fibers placed and oriented randomly in 3D space bridge matrix cracks with a certain inclination angle and embedded length distribution, respectively. The distribution is determined for fibers centers that have completely homogeneous distribution inside the specimen volume. Additionally, we derive the probability density function of a random embedded length and fiber inclination angle to the normal of (crack) plane for those fibers that intersect the plane.

Úvod

V příspěvku bude prezentována pravděpodobnostní formulace geometrické úlohy, jejímž cílem je určení rozdělení náhodného počtu vláken, která protínají rovinu (trhlinu) v kompozitu vyztuženém krátkými vlákny. Znalost počtu vláken přemosťujících trhlinu je důležitá pro stanovení celkové síly, kterou je schopen přenést kompozit v místě trhliny. Kromě náhodného počtu vláken na řezu bude stanoveno pravděpodobnostní rozdělení náhodného úhlu a kotevní délky vlákna.

Geometrie náhodně rozmístěných vláken

Pro popsání geometrie vláken uvnitř třírozměrného vzorku kompozitu potřebujeme pět parametrů, které jednoznačně definují polohu a orientaci

[1]VOŘECHOVSKÝ Miroslav, doc. Ing., Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební. Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, vorechovsky.m@fce.vutbr.cz

[2]SADÍLEK Václav, Ing., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební. Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, sadilek.v@fce.vutbr.cz

vlákna. Uvažujme vzorek jako kvádr o rozměrech L_x, L_y a L_z jehož těžiště je umístěno v počátku souřadnic kartézského systému a jeho hrany jsou zarovnány ve směru os x, y a z (viz obr. 1a). Předpokládáme, že rozměry hranolu jsou větší než dvojnásobek délky vlákna ℓ. Poloha každého vlákna je definována pomocí tří souřadnic polohy středu vlákna a páru nezávislých úhlů. Ze všech možných dvojic úhlů jsme zvolili úhly φ_x a φ_y, tj. úhly mezi vláknem a příslušnou osou x a y (viz obr. 1c). Předpokládáme, že uvnitř kompozitu mají vlákna náhodnou polohu a orientaci, proto budeme dále s těmito pěti geometrickými parametry pracovat jako s náhodnými veličinami.

Uvažujme zcela rovnoměrné umístění středů vláken a jejich natočení bez vlivu okrajů kompozitu (obr. 2). Rozdělení úhlu natočení je nezávislé na souřadnicích středu vlákna (x, y a z). Hustoty pravděpodobnosti úhlů φ_x a φ_y jsou:

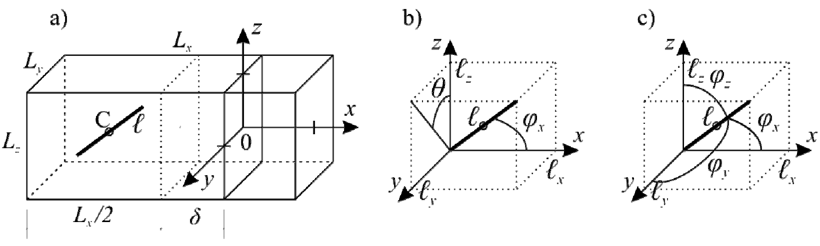
$$f_{\varphi_x}\left(\varphi_x\right) = \sin\varphi_x \quad pro\ \varphi_x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle,\ 0 \text{ jinak} \tag{1}$$

$$f_{\varphi_y}\left(\varphi_y\right) = \frac{1}{2}\sin\varphi_y \quad pro\ \varphi_y \in \left\langle 0;\pi\right\rangle,\ 0 \text{ jinak} \tag{2}$$

Podobně místo φ_y můžeme uvažovat úhel θ rovnoměrně rozdělený na intervalu (0,2π). Tato volba je vhodná při generování simulací na počítači.

Známe-li hustoty dvou nezávislých úhlů, můžeme sestrojit funkci hustoty pravděpodobnosti (PDF) středů vlákna. Sdruženou hustotu pravděpodobnosti všech pěti náhodných veličin (x, y, z, φ_x a φ_y) popisujících polohu a orientaci vlákna získáme jako součin jejich marginálních hustot:

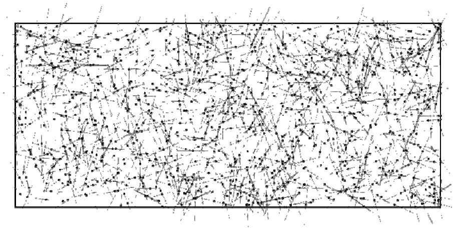
$$f_{xyz\varphi_x\varphi_y}\left(x, y, z, \varphi_x, \varphi_y\right) = \sin\left(\varphi_x\right)\frac{1}{2}\sin\left(\varphi_y\right)\frac{1}{L_x L_y L_z} \tag{3}$$



Obr. 1: a) Umístění souřadného systému uvnitř vzorku o objemu $L_xL_yL_z$. b) Dvojice úhlů natočení vlákna použitá při generování simulací na počítači. $\ell_x=\ell\cos(\varphi_x)$, $\ell_y=\ell\sin(\theta)\sin(\varphi_x)$, $\ell_z=\ell\cos(\theta)\sin(\varphi_x)$ c) Úhly definující natočení vlákna vzhledem k souřadným osám. $\ell_x=\ell\cos(\varphi_x)$, $\ell_y=\ell\cos(\varphi_y)$, $\ell_z=\ell\cos(\varphi_z)$

Tato sdružená hustota pravděpodobnosti (3) platí pro obecnou 3D úlohu. Dále budeme uvažovat pouze případ trhliny modelovaný rovinou kolmou na osu *x* (obr. 1a). V tomto případě, pozice *y*, *z* a úhel φ_y neovlivňují výsledná rozdělení. Poloha vlákna může být potom popsána sdruženou hustotou pravděpodobnosti dvou náhodných veličin *x* a φ_x. Toto rozdělení získáme integrací (3) přes všechna *y*, *z* a φ_y. Sdružená hustota pravděpodobnosti má potom tvar:

$$f_{x\varphi_x}\left(x,\varphi_x\right)=\frac{\sin\left(\varphi_x\right)}{L_x} \tag{4}$$



Obr. 2: Vzorek kompozitu vygenerovaný metodou Monte Carlo – pohled ve směru osy y. Rovnoměrné rozmístění středů vláken – vlákna mohou přesahovat hrany.

Pravděpodobnost průniku vlákna s rovinou

Pro výpočet síly, kterou jsou schopna přenést vlákna přemosťující trhlinu (trhlina je uvažována jako rovinná plocha), musíme zjistit jejich počet. Tento počet *k* je náhodná veličina. Úloha pro výpočet rozdělení počtu vláken *k*, která protínají rovinu (trhlinu), z celkového počtu vláken *n* uvnitř kompozitu lze zjednodušit na výpočet pravděpodobnosti průniku jednoho vlákna s rovinou. Jakmile známe tuto pravděpodobnost *p* pro určitou polohu roviny, můžeme použít binomické rozdělení pro počet protnutých vláken *k* uvnitř kompozitu. Pravděpodobnost protnutí vlákna je získána jako část celkové jednotkové pravděpodobnosti všech možných poloh vlákna a je vypočtena jako integrál přes všechny možné konfigurace s vhodnou indikátorovou funkcí $\mathbf{1}_A(x)$, která indikuje průnik vlákna. Dále je uvažováno umístění roviny v počátku souřadného systému $x = 0$. Průmět vlákna do směru souřadné osy můžeme zapsat jako $\ell\cos(\varphi)$, potom podmínka průniku vlákna s rovinou je dána vztahem:

$$-\frac{1}{2}\ell\cos\varphi\le x\le\frac{1}{2}\ell\cos\varphi \tag{5}$$

Indikátorová funkce $\mathbf{1}_A(x)$ vrací hodnotu 1 (průnik), pokud x je prvkem podmnožiny A a hodnotu 0 pokud není. Matematicky může být použita následující indikátorová funkce:

$$\mathbf{1}_A\left(x\right)=\mathbf{1}_A\left(\frac{1}{2}\ell\cos\left(\varphi_x\right)-\left|x\right|\right) \tag{6}$$

Poznamenejme, že je uvažováno velmi tenké vlákno a tudíž vliv jeho poloměru je zanedbán. Dále budeme uvažovat polohu trhliny (roviny) minimálně na vzdálenost délky vlákna ℓ od stěny kompozitu.

Pravděpodobnost protnutí vlákna rovinou se vypočítá jako:

$$p\left(\ell;L\right)=\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f_{x\varphi_x}\left(x,\varphi_x\right)\,\mathbf{1}_A\left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi-\left|x\right|\right)\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\frac{\ell}{L} \tag{7}$$

Statistiky počtu vláken protínajících rovinu

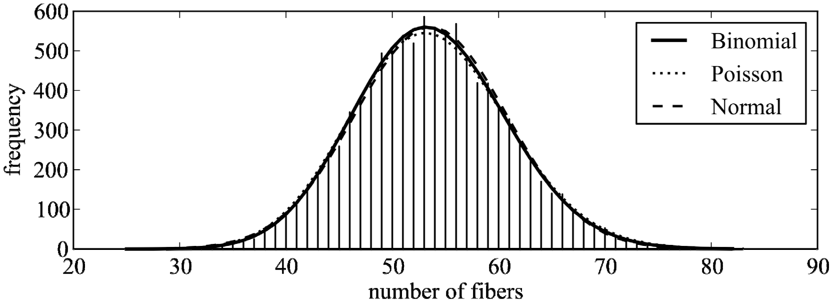
Celkový počet vláken n uvnitř kompozitu může být vypočítán z objemového podílu vláken v_f, objemu jednoho vlákna V_f a celkového objemu kompozitu V_t:

$$v_\mathrm{f}=\frac{nV_\mathrm{f}}{V_\mathrm{t}}=\frac{nA_\mathrm{f}\ell}{A_\mathrm{c}L}\quad\Rightarrow\quad n=v_\mathrm{f}\frac{A_\mathrm{c}L}{A_\mathrm{f}\ell} \tag{8}$$

kde A_f je průřezová plocha jednoho vlákna a A_c je průřezová plocha kompozitu $L_y.L_z$.

Proces řezání vzorku obsahujícího n vláken může být modelován jako n nezávislých Bernoulliho pokusů s výslednou pravděpodobností úspěchu p. Pravděpodobnost p průniku vlákna s rovinou byla odvozena v předchozí kapitole a nabývá hodnoty z intervalu (0, 1). Náhodná veličina k má binomické rozdělení Bi(n, p). Potom funkce pravděpodobnosti počtu k má tvar:

$$p_k=\mathrm{P}(K=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)} \tag{9}$$



Obr. 3: Histogram náhodného počtu vláken protínajících rovinu trhliny. Aproximace pomocí Binomického, Poissonova a normálního rozdělení.

Střední hodnota a rozptyl počtu vláken *k* protínajících rovinu tedy jsou:

$$\begin{aligned} E\left[k\right] &= \mu_k = np \\ D\left[k\right] &= \sigma_k^2 = np\left(1-p\right) \end{aligned} \qquad (10)$$

Toto rozdělení může být aproximováno pomocí Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = np$. Asymptoticky je možné toto rozdělení aproximovat normálním rozdělením s parametry uvedenými v rovnici (10) (viz obr. 3).

Geometrie vláken protnutých rovinou

V této kapitole se budeme zabývat rozdělením (i) náhodného natočení φ_C a (ii) kotevní délky ℓ_e vláken protínajících rovinu (trhlinu) ve střední části vzorku (vzdálenost od hrany kompozitu je větší než délka vlákna). Kotevní délka je kratší z délek přemosťujícího vlákna vyskytující se nalevo nebo napravo od trhliny.

Hustota pravděpodobnosti úhlu φ_C je získána integrací sdružené hustoty pravděpodobnosti (3) na intervalu S_x:

$$\begin{aligned} f_{\varphi_c}(\varphi) &= \frac{1}{p_{\mathrm{I}}} \int_{S_x} f_{x\varphi}\left(x,\varphi\right) \mathbf{1}_A \left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi - \left|x\right| \right) \mathrm{d}x \\ S_x &= \left\langle -\frac{L_x}{2}; +\frac{L_x}{2} \right\rangle \end{aligned} \qquad (11)$$

Hustota pravděpodobnosti vláken φ_C protínajících rovinu je:

$$f_{\varphi_c}(\varphi_c) = \begin{cases} \sin(2\varphi_c) & \text{pro } \varphi_c \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{12}$$

Nejfrekventovanější úhel natočení vláken přemosťujících trhlinu je tedy 45°.

Kotevní délka ℓ_e je vypočítána z dané polohy středu x a natočení φ_x:

$$\ell_e = \max\left(0\,,\frac{\ell}{2} - \frac{|x|}{\cos\varphi_x}\right) \tag{13}$$

Kotevní délka ℓ_e ve střední části vzorku má rovnoměrné rozdělení na intervalu (0, ℓ/2) a hustotu pravděpodobnosti:

$$f_{\ell_e}(\ell_e) = \frac{2}{\ell} \tag{14}$$

Sdružená hustota pravděpodobnosti páru (φ_c, ℓ_e) může být sestrojena jako součin marginálních hustot, tj. součin (12) a (14).

Závěry

V článku byl předveden postup výpočtu náhodného počtu vláken přemosťujících trhlinu v kompozity vyztuženém krátkými vlákny a na základě známého objemového podílu vláken, tvaru vzorku a vláken. Uvedená rozdělení jsou důležitá pro správné určení náhodné síly přenášené vlákny, která přemosťují trhlinu, v náhodně vyztuženém kompozitu. Pravděpodobnostní výpočet této síly je uveden v [3].

Tento příspěvek byl vypracován v rámci řešení projektu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy č. 1M06005 (CIVAK) a projektu GAČR GD103/09/H085.

Literatura

[1] Z. LIN, T. KANDA A V. C. LI. On interface property characterization and performance of fiber-reinforced cementitious composites. *Concrete Science and Engineering*, 1999, s. 173-184. ISSN 0022-5096.

[2] V. C. LI, Y. WANG A S. BACKER. A micromechanical model of tension-softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1991, s. 607-625. ISSN 1295-2826.

[3] M. VOŘECHOVSKÝ, V. SADÍLEK A R. RYPL. Probabilistic evaluation of a crack bridge performance in fiber reinforced composites. *Aplikovaná mechanika 2011*, Velké Bílovice 2011. (in print)