

## POROVNÁNÍ VARIANT MODELŮ NOSNÍKU SE ZÁŘEZEM Z HLEDISKA PODCHYCENÍ VLIVU VELIKOSTI

### Comparison of modeling alternatives of notched beam with respect to size effect

Václav Sadílek<sup>1</sup>, Miroslav Vořechovský<sup>2</sup>, František Černík<sup>3</sup>

*The article compares three ways of modeling a notch in cementitious composites in ATENA software, namely (a) regular FEM mesh – cracks are represented by inelastic strains in finite elements, (b) refined FEM mesh in the vicinity of the notch – cracks are represented by inelastic strains in finite elements, (c) nonlinear interface elements along the prescribed crack path (a contact with predefined crack-opening law). The comparison is made with respect to the description of the stress field in the vicinity of the notch/crack tip and the related energetic size effect on nominal strength of the notched structure. As a reference, closed-form size effect formula is used.*

#### Úvod

Pro určování některých lomově-mechanických parametrů se používají vzorky se zářezem namáhané tříbodovým ohybem. Identifikace materiálových vlastností ze zkoušek si vyžaduje vhodný výpočtový model. Tato práce se zabývá třemi různými způsoby modelování této zatěžovací zkoušky v programu ATENA 2D [2] a porovnání těchto variant z hlediska popisu napětí a též energetického vlivu velikosti s analytickým vztahem, do kterého vstupují základní lomově-mechanické materiálové parametry.

---

<sup>1</sup>SADÍLEK Václav, Ing., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební. Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, sadilek.v@fce.vutbr.cz

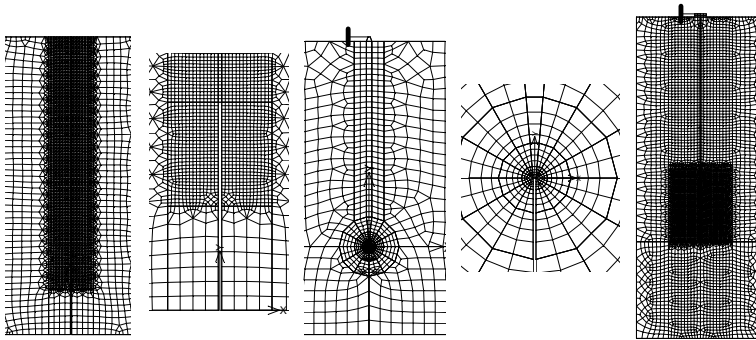
<sup>2</sup>VOŘECHOVSKÝ Miroslav, doc. Ing., Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební. Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, vorechovsky.m@fce.vutbr.cz

<sup>3</sup>ČERNÍK František, Bc., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební. Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, cernikF@study.fce.vutbr.cz

## Model

Pro modelování vzorků byl použit lomově-plastický materiál 3D Non-Linear Cementitious 2 (modelováno ve 2D s uvažováním rovinné napjatosti) s výchozími materiálovými parametry vygenerovanými programem ATENA pro zadanou krychelnou pevnost  $f_{CU} = 30$  MPa. Nejvýznamnější hodnoty parametrů jsou: tahová pevnost  $f_t = 2.317$  MPa, lomová energie  $G_F = 57.93$  N/m a modul pružnosti  $E = 30.32$  MPa. Byly připraveny tři varianty modelu tříbodového ohybu nosníku se zářezem (viz obr. 1):

- A** pravidelná čtyřúhelníková síť rovnoběžná se zářezem a předpokládaným směrem šíření trhlin
- B** výrazně zjemněná polární síť na špice zářezu
- C** trajektorie trhliny předepsaná pomocí kontaktního prvku mezi rozhraním bloků, zjemněná síť v první třetině výšky ligamentu



Obr. 1: Varianty modelování zářezu (zleva typ **A+detail**, **B+detail**, **C**)

Vzorky typu **A** mají v místě předpokládaného šíření trhliny zahuštěnou síť a zářez je tvořen šířkou pásu jednoho konečného prvku (vrchol trhliny je tvořen hranou konečného prvku). Uživatel může očekávat inicializaci a šíření trhliny jedním pásem konečných prvků nad zářezem.

U vzorků typu **B** tvoří vrchol trhliny opět hrana jednoho konečného prvku. Od vrcholu zářezu se rozbíhá zhuštěná polární síť, která později přechází do mapované sítě jako u modelu **A**. Výhodou má být zpřesnění aproximace průběhu napětí právě v blízkosti špičky zářezu (a vrcholu trhliny v počátečních fázích šíření).

Typ **C** rozděluje trámec do dvou bloků, jejichž liniové rozhraní je v místě plochy skutečného ligamentu spojené pomocí kontaktních prvků. Tento liniový kontakt představuje předepsanou dráhu pro trhlinu. Parametry kontaktního prvku byly nastaveny tak, aby odpovídaly materiálovým parametrům použitým v předešlých modelech včetně funkce změkčení dle Hordijka. Nevýhoda této varianty tkví v potřebě nastavit vhodnou hodnotu normálové a tečné tuhosti, která neovlivní nevhodně výsledky výpočtu a přitom umožní stabilní průběh výpočtu.

### Výsledky

Výsledky jsou nejdříve porovnávány s analytickým vztahem pro vliv velikosti, na který je pohlíženo jako na referenční řešení. Výška nosníku je uvažována jako srovnávací velikost  $D$ . Relativní hloubka zářezu je definována jako poměr hloubky zářezu " $a$ " a velikosti " $D$ "; zde uvažujeme poměr  $\alpha = a/D = 0.3$ . Nominální pevnost je definována jako poměr maximálního ohybového momentu  $M = Fl/4$  ( $l$  je vzdálenost podpor,  $F$  je svislá síla uprostřed rozpětí) a průřezového modulu  $W$  (bez ohledu na hloubku zářezu), což pro tříbodový ohyb trámců obdélníkového průřezu vede na:

$$\sigma_N = \frac{3 Fl}{2 BD^2} \quad (1)$$

V bilogaritmickém měřítku je pro malé velikosti asymptota nominálního napětí dána teoretickou mezní plastickou únosností:

$$\sigma_{N0} = \frac{M_{pl}}{W} = 3 \cdot f_t \cdot (1 - \alpha)^2, \quad M_{pl} = \frac{(D - a)^2}{2} B f_t$$

a přechodová oblast mezi malými a velkými velikostmi byla proložena křivkou na základě materiálových parametrů modelu ze vztahu pro nominální napětí  $\sigma_{Nu}$  viz Planas, Guinea a Elices [1] pro  $\alpha \geq 0.3$  a  $D \leq 4\ell_1$ :

$$\sigma_{Nu} = \eta_0 f_t \left[ \frac{1 + 4.23 \sqrt{\kappa D / \ell_1}}{1 + 0.622 \sqrt{\kappa D / \ell_1}} + 2.7 \frac{\kappa D}{\ell_1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_0 = 3(1 - \alpha)^2, \quad \kappa = 1 - \alpha^{1.45} \quad (2)$$

$$\ell_1 = \frac{G_F E}{2 f_t^2} \quad (3)$$

Průběh napětí  $\sigma_{xx}$  na čele trhliny pro jednotlivé varianty byl porovnán s prvním členem rozvoje napětí podle Williamse (dále budeme toto označovat jako napětí podle LEFM-lineární elastická lomová mechanika). Napětí otevírající zářez (trhlinu) závisí na faktoru intenzity napětí  $K_I$  pro tahový mód porušení a na svislé vzdálenosti  $r$  od špičky zářezu. Ve vztazích

$f_1(\alpha, \beta) \approx 1.9$  je tvarová funkce podle Kunze [3], kde  $\beta = 1.14$  je poměr poloviny rozpětí podpory  $L = l/2$  a velikostí  $D$ .

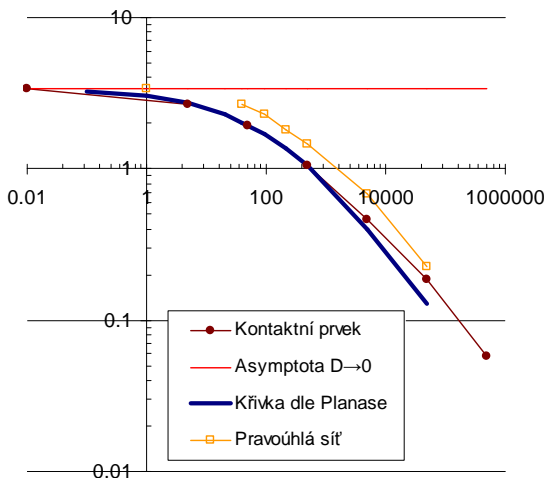
$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad K_I = \sigma_N (\pi a)^{\frac{1}{2}} f_1\left(\frac{a}{D}, \frac{L}{D}\right) \quad (4)$$

$$f_1\left(\frac{a}{D}, \frac{L}{D}\right) = Y_1\left(\frac{a}{D}\right) Y_2\left(\frac{a}{D}, \frac{L}{D}\right)$$

$$Y_1\left(\frac{a}{D}\right) = 2.057 - 3.83 \frac{a}{D} + 22.14 \left(\frac{a}{D}\right)^2 - 43.24 \left(\frac{a}{D}\right)^3 + 41.94 \left(\frac{a}{D}\right)^4 \quad (5)$$

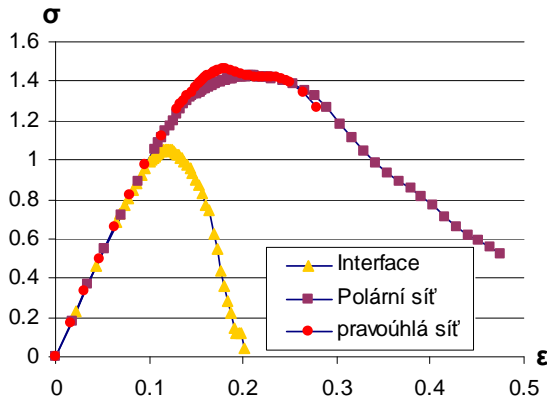
$$Y_2\left(\frac{a}{D}, \frac{L}{D}\right) = 0.4607 + 0.0968 \frac{L}{D} - 0.0252 \left(\frac{L}{D}\right)^2 + 0.0024 \left(\frac{L}{D}\right)^3 - 0.0118 \frac{a}{D} \frac{L}{D} + 0.0012 \frac{a}{D} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

Na obrázku 2 je porovnání jednotlivých křivek vlivu velikosti pro jednotlivé varianty zářezu s parametrem  $\alpha=0.3$ . Silnou plnou čarou je zakresleno referenční analytické řešení přechodu pevnosti od plastické meze pro malé vzorky až po LEFM řešení pro velké vzorky. U varianty **C** je velmi dobrá shoda mezi vypočtenými daty a analytickým vztahem (2) pro velikosti do  $D = 500$  mm. Pro větší velikosti se křivka vzdálí od analytického řešení, ale rovněž se ustálí ve sklonu asymptoty  $1/2$ , což je pravděpodobně způsobeno nedostatečnou diskretizací nad špicí zářezu a tedy nedostatečným vystižením toku energie do špičky zářezu.



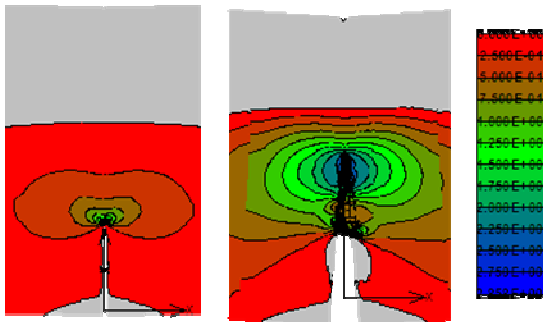
Obr. 2: Porovnání křivek vlivu velikosti

U variant **A** a **B** dochází ke vzniku paralelních trhlin v okolních prvcích. To je v rozporu s očekáváním uživatele a rovněž v rozporu s předpokladem modelu šířky pásu trhlin, neboť ten regularizuje model s tím, že disipační procesy probíhají právě v jednom pásu prvků. U modelů **A** a **B** se projevuje větší disipace energie během porušování. U varianty **C** s přesně předepsanou dráhou trhliny je spotřeba energie zřejmě menší a v souladu s předpoklady, viz obrázek 3. Jako vedlejší efekt lze pozorovat nadhodnocení nominální pevnosti u modelů **A** a **B**.

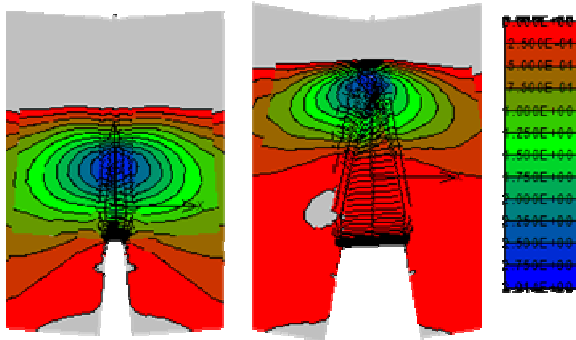


Obr. 3:  $\sigma$ - $\epsilon$  diagram jednotlivých variant zářezu

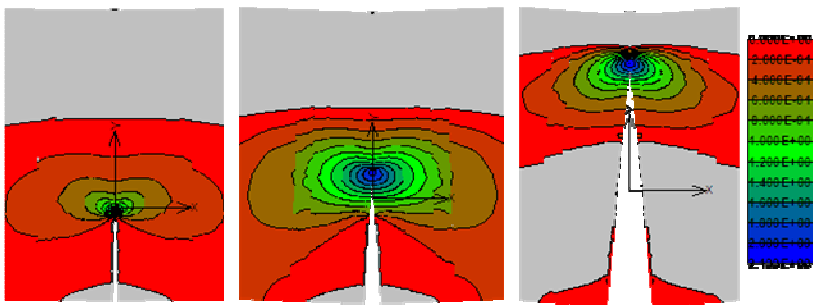
Na obrázcích 4a-4c jsou vykresleny průběhy tahových napětí  $\sigma_{xx}$ . První výřez je ze zatěžovacího stavu v lineární části  $\sigma$ - $\epsilon$  diagramu a druhý je při dosažení maximálního nominálního napětí (nominální pevnosti)  $\sigma_{Nu}$ . Pro variantu **C** s kontaktním prvkem je zde výřez v zatěžovacím stavu na konci sestupné větve. U variant **A** a **B** můžeme vidět velký rozvoj neelastických přetvoření (tedy modelových trhlin) v poměrně širokém pásu nad zářezem.



Obr. 4a: Průběh tahových napětí  $\sigma_{xx}$  varianta **A**

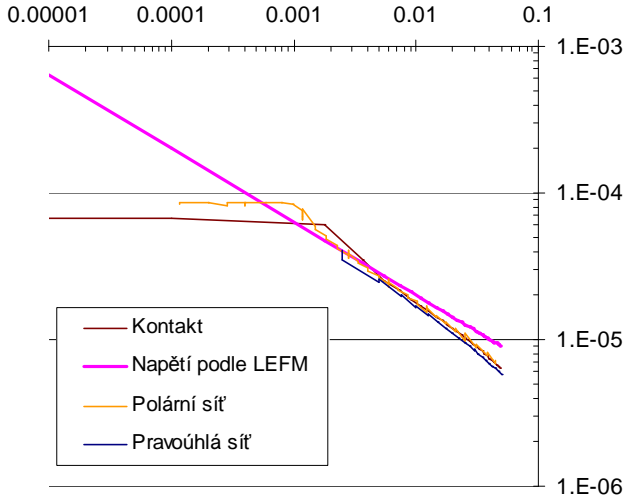


Obr. 4b: Průběh tahových napětí  $\sigma_{xx}$  varianta B

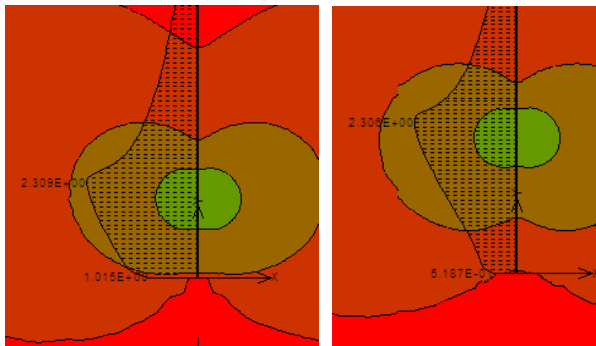


Obr. 4c: Průběh tahových napětí  $\sigma_{xx}$  varianta C

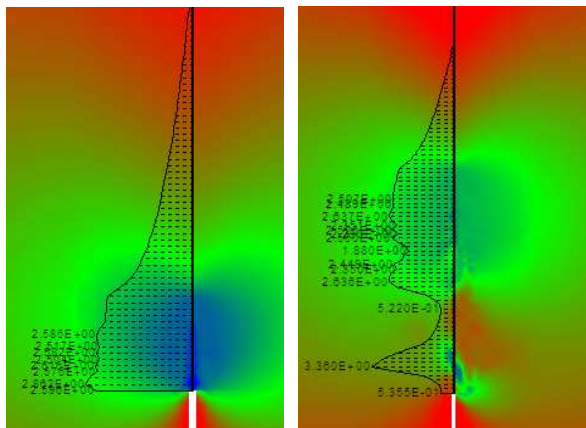
Na obrázku 5 je porovnání průběhu tahových napětí  $\sigma_{xx}$  podél svislého řezu nad zářezem. Vykreslen je též průběhy napětí podle LEFM. Následuje série obrázků 6-7, které dokumentují průběh napětí v řezu nad zářezem jednotlivých modelů v různých fázích procesu růstu trhliny.



Obr. 5: Porovnání tahových napětí  $\sigma_{xx}$  podél svislé linie nad zářezem



Obr. 6: Porovnání tahových napětí  $\sigma_{xx}$  v řezu nad zářezem modelovaného kontaktním prvkem (varianta C). Napětí na vzestupné větvi  $\sigma$ - $\epsilon$  diagramu (vlevo). Napětí při  $\sigma_{Nu}$  (vpravo).



Obr. 7: Porovnání tahových napětí  $\sigma_{xx}$  v řezu nad zářezem na šířku jednoho konečného prvku (varianta A). Napětí na vzestupné větvi  $\sigma$ - $\epsilon$  diagramu (vlevo). Napětí při  $\sigma_{Nu}$  (vpravo).

## Závěr

Byly ukázány tři různé způsoby modelování nosníku se zářezem. Z výsledků vyplývá, že při znalosti trajektorie trhliny v naší aplikaci byla nej přesnější varianta modelování pomocí dvou pevných bloků spojených pomocí kontaktních prvků. Takový model poskytuje výsledky ve shodě s analytickým řešením podle pramene [1].

*Tento příspěvek byl vypracován v rámci řešení projektu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy č. 1M06005 (CIVAK) a projektu GAČR 103/09/H085.*

## Literatura

- [1] PLANAS, J., GUINEA, G. V. A ELICES, M., 1997. *Generalized size effect equation for quasibrittle materials*. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct., 20(5), 671-687. ODKAZ PŘEVZAT Z BAŽANT, Z. P., PLANAS, J., 1998. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials. CRC Press, Boca Raton and London. str.177.
- [2] ČERVENKA V., PUKL R., 2005. *Atena program documentation*. Tech. rep. Červenka Consulting, Prague, Czech Republic, <http://www.cervenka.cz>
- [3] KUNZ J., 2000. *Základy lomové mechaniky*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000. 260 s.